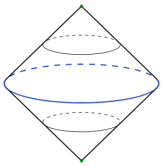
Premi Josep Teixidor de Matemàtiques 2007

«Localització i conservació d'estructures en homotopia estable», Javier Gutiérrez

La teoria d'homotopia ordinària estudia els espais topològics des d'un punt de vista que ens permet doblegar-los i aixafar-los, però mai trencar-los. La *teoria d'homotopia estable*, principal objecte d'estudi d'aquesta tesi, captura l'essència de l'homotopia ordinària prescindint de les particularitats de les dimensions baixes. Això s'aconsegueix invertint el functor $X \mapsto \Sigma X$ que envia un espai a la seva suspensió, la qual cosa s'obté adherint per la base dos cons sobre X.

$\Sigma X \quad =$ 

La successió d'espais $\{X, \Sigma X, \Sigma^2 X, \dots\}$ determina un *espectre* $\Sigma^\infty X$, que són els objectes de la categoria d'homotopia estable. Formalment, un espectre E consta d'una successió d'espais $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ i aplicacions $\Sigma E_n \to E_{n+1}$, encara que la millor manera d'entendre'ls és a través de les *teories de cohomologia* generalitzades E^*. Aquestes teories fan correspondre a cada espai X un grup abelià graduat $E^*(X)$, el qual només depèn del tipus d'homotopia de X, de manera que $E^*(\Sigma X) \cong E^{*+1}(X)$.

Exemples rellevants de teories de cohomologia són la *cohomologia singular* $H^*(X, A)$ amb coeficients a un grup abelià A i la *teoria* K, $K^*(X)$. El grup $K^0(X)$ classifica fibrats vectorials sobre X.

Existeix una bijecció entre els tipus d'homotopia d'espectres i les teories de cohomologia $E \leftrightarrow E^*$ donada per la fórmula

$$E^n(X) \quad = \quad \lim_{k\to\infty} [\Sigma^k X, E_{n+k}],$$

on a la dreta de la igualtat trobem un límit directe de conjunts de classes d'homotopia d'aplicacions. L'espectre HA associat a la cohomologia singular $H^*(X, A)$ s'anomena *espectre d'Eilenberg-MacLane* del grup abelià A.

La categoria d'homotopia estable, en contrast amb l'ordinària, posseeix una rica estructura anàloga a la d'altres categories d'interès en àlgebra i geometria algebraica. És una categoria triangulada en el sentit de Verdier, com la categoria derivada d'un anell. A més, poseeix una mena de producte tensorial que és el producte *smash* d'espectres $E \wedge F$. Durant molts anys es va creure que un tal producte no podia existir. El descobriment recent d'aquest producte ha impulsat un desenvolupament de la teoria d'homotopia estable que estén l'àlgebra i la geometria algebraica ordinàries a través del functor d'Eilenberg-MacLane $A \mapsto HA$. Aquestes noves disciplines es coneixen comunament com a *brave new algebra* i *brave new algebraic geometry*.[1]

Un *espectre anell* E és estricte si la multiplicació $\mu\colon E \wedge E \to E$ és estrictament associativa $\mu(\mu \wedge \mathrm{id}_E) = \mu(\mathrm{id}_E \wedge \mu)$ i unitària. En general, pot ser que aquestes relacions només siguin d'homotopia $\mu(\mu \wedge \mathrm{id}_E) \simeq \mu(\mathrm{id}_E \wedge \mu)$. Podem fer la mateixa distinció per a *espectres mòdul*, etc.

Moltes teories de cohomologia E^* prenen valors $E^*(X)$ que tenen una estructura natural d'anell. Per exemple, el producte *cup* dota la cohomologia singular $H^*(X, A)$ d'estructura d'anell, si A és un anell. El producte tensorial de camps vectorials determina la multiplicació a $K^*(X)$. En aquests casos, l'espectre associat E és un espectre anell.

Les tècniques de localització ens permeten inferir propietats globals d'un objecte a partir de propietats locals d'objectes més senzills. Són de molta utilitat en àlgebra. Un exemple elemental: per estudiar els nombres enters $\mathbb{Z}$ ens podem concentrar en la divisibilitat per un primer donat p. Per a això, podem considerar el subanell $\mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Q}$ format per les fraccions $\frac{m}{n}$ en què $p \nmid n$. En aquest anell, qualsevol element factoritza com a producte d'una potència del primer p^n per una unitat, d'aquí la seva simplicitat comparat amb $\mathbb{Z}$. A més, $\mathbb{Z} = \bigcap_{p \text{ primer}} \mathbb{Z}_{(p)}$.

Les localitzacions també tenen una llarga tradició en topologia algebraica. L'exemple més clàssic són les peces de Postnikov $P_n(X)$, $n \geq 0$, que s'obtenen truncant l'homotopia de X a dimensions $\leq n$. En aquest cas, X es reconstrueix prenent un límit invers $X = \lim_{\infty \leftarrow n} P_n X$.

Aquesta tesi porta a terme un estudi profund de les localitzacions en teoria d'homotopia

[1] Vegeu l'article de R. M. Vogt, «Introduction to algebra over 'brave new rings'», The 18th Winter School «Geometry and Physics» (Srní, 1998). *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (2), supl. 59 (1999), 49–82.

estable en el marc de la *brave new algebra*. La idea de localització homotòpica és la següent: donada una aplicació entre espectres $f\colon A \to B$ es diu que un espectre Z és *f-local* si Z «pensa» que f és una equivalència d'homotopia, és a dir, si f indueix bijeccions $[\Sigma^n B, Z] \cong [\Sigma^n A, Z]$, $n \geq 0$. Per a tot espectre X existeix una aplicació $X \to L_f X$ universal entre totes les que tenen un codomini f-local. Això determina un functor de localització L_f a la categoria d'espectres que és idempotent $L_f \simeq L_f^2$ i pren valors f-locals. La majoria de les localitzacions que es coneixen són d'aquest tipus. Un cas interès d'especial són les localitzacions respecte a la teoria d'homologia E_* associada a un espectre E. En aquest cas, f és la unió de totes les aplicacions $X \to Y$ que indueixen un isomorfisme en homologia $E_*(X) \cong E_*(Y)$.

En un dels resultats principals d'aquesta tesi, l'autor determina quan un functor L_f envia un espectre anell E a un espectre anell $L_f E$ de manera que el morfisme universal $E \to L_f E$ sigui multiplicatiu i unitari. Hi ha dues condicions suficients: quan l'homotopia de E i $L_f E$ estigui concentrada a dimensions ≥ 0 o quan L_f sigui compatible amb l'estructura triangulada de la categoria d'homotopia estable. S'il·lustra amb exemples que aquest resultat és, probablement, el més general possible. A més, l'autor dóna diferents caracteritzacions de la compatibilitat de L_f amb l'estructura triangulada. També obté els resultats anàlegs per a espectres mòdul.

Així mateix, es prova que els espectres anell estrictes es preserven per localitzacions sota les mateixes hipòtesis que al paràgraf anterior. Aquest resultat és conseqüència d'un altre dels resultats principals d'aquesta tesi, vàlid en categories homotòpiques més generals, que dóna condicions sobre L_f per a la preservació, no només d'anells, sinó d'àlgebres sobre opèrades.

La tesi conté un bon nombre de càlculs de localitzacions d'espectres d'Eilenberg-MacLane. Per exemple, es prova que $L_f \Sigma^n HA$ té, com a màxim, dos grups d'homotopia no trivials en dimensions n i $n+1$. A més, si L_f és una localització homològica, construeix un triangle exacte per al càlcul dels grups d'homotopia no trivials de $L_f HA$. Aquests grups es calculen explícitament per a $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(p^n)$, $\mathbb{Q}$ així com per als enters p-àdics, entre altres.

En general, demostra que $L_f \Sigma^n H\mathbb{Z} \simeq \Sigma^n HA$ en què A és un anell rígid. A més, prova que tot anell rígid es pot obtenir d'aquesta manera. Existeixen anells rígids de cardinal arbitràriament gran; per tant, dedueix que hi ha una classe pròpia de functors L_f no equivalents. Això contrasta fortament amb el fet conegut de l'existència de només un conjunt de localitzacions homològiques no equivalents.

És conegut que si A és un anell, HA és un espectre anell estricte. Les categories homotòpiques de HA-mòduls estrictes i no estrictes són tanmateix molt diferents en general. La primera és equivalent a la categoria derivada de A, que posseeix molt bones propietats, mentre que la segona és més misteriosa. L'autor prova que ambdues categories mai no coincideixen si la dimensió global de A és > 1 però que són equivalents si A és un cos o $A \subset \mathbb{Q}$.

Aquesta tesi conté molts altres resultats d'interès per als experts en la matèria. Les tècniques de localització són potser les principals eines de càlcul que es fan servir per a abordar els majors problemes oberts en teoria d'homotopia, com el càlcul dels grups d'homotopia de les esferes. Per aquest motiu creiem que la tesi constitueix un avenç significatiu en aquest camp de les matemàtiques, i és prou mereixedora del premi Josep Teixidor de Matemàtiques a la millor tesi 2007.

Fernando Muro
UB